Parcial: A

Corrector: Lucas Figarola

ej2: A

HOJA Nº 1

FECHA

2)

a) PROPONGO UN CERTIFICADO QUE ES VÁLIDO PARA LOS 3 PROBLEMAS.

CERTIFICADO: SECUENCIA DE ARISTAS L

VERIFICADOR:
- CHEQUEAR QUE L ES EFECTIVAMENTE UN CAMINO DE s a t EN G
- VER SI EL PESO DEL RECORRIDO L ES MENOR O IGUAL A P
- VER QUE $|L| = K$ EN LEN-MIN-PATH y K-LEN-MIN PATH
o VER QUE $|L| = |V(G)| - K$ EN K-MISS-MIN-PATH

PODEMOS VER FACILMENTE QUE PODEMOS VERIFICAR ESAS 3 CONDICIONES EN TIEMPO POLINOMIAL.

COMO PARA LOS 3 PROBLEMAS PUDIMOS MOSTRAR UN CERTIFICADO, UN ALGORITMO DE VERIFICACIÓN POLINOMIAL y SE PUEDE NOTAR QUE EL VERIFICADOR DEVUELVE SÍ, SI SE CUMPLEN TODAS LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA

$\Rightarrow$ LEN-MIN-PATH $\in$ NP
K-LEN-MIN-PATH $\in$ NP
K-MISS-LEN-PATH $\in$ NP

b) PRUEBO TODAS LAS SECUENCIAS DE VÉRTICES DE TAMAÑO K, PARA CADA UNA DE ELLAS ME FIJO SI ES UN CAMINO DE s a t EN G y PARA LAS QUE SE CUMPLA, SI EL PESO DEL CAMINO QUE FORMAN ESOS VÉRTICES ES MENOR O IGUAL A P.

- VER TODAS LAS SECUENCIAS DE VÉRTICES DE TAMAÑO K CORRESPONDE A VER PERMUTACIONES TOMADAS DE A K:

VER $\binom{n}{k} \Rightarrow O(n^k)$ QUE ES POLINOMIAL PORQUE K ESTÁ FIJO

YA VIMOS QUE VER SI UNA SECUENCIA DE VÉRTICES ES UN CAMINO DE s a t EN UN GRAFO ES POLINOMIAL y VER SI EL PESO DEL CAMINO ES MENOR O IGUAL A P ES POLINOMIAL.

$\therefore$ ESTE ALGORITMO ES POLINOMIAL

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

c) PARA VER QUE LEN-MIN-PATH ES NP-COMPLETO TENGO QUE VERIFICAR QUE:

① LEN-MIN-PATH $\in$ NP

② VER QUE $\exists\ \Pi \in$ NP-COMPLETO tq $\Pi \leq_p$ LEN-MIN-PATH

EL PUNTO ① LO PROBAMOS EN EL INCISO a)

VEAMOS ②: COMO SABEMOS QUE TSP ES NP-COMPLETO QUEREMOS VER QUE TSP $\leq_p$ LEN-MIN-PATH. PARA ESO TENEMOS QUE PROPONER UNA FUNCIÓN f TAL QUE:

- TRANSFORME INSTANCIAS DE TSP EN INSTANCIAS DE LEN-MIN-PATH
- SEA POLINOMIAL
- $\forall$ I INSTANCIA DE TSP, RESP(I) = Si $\Leftrightarrow$ RESP(f(I)) = Si

SEA $f(G, s, t, p) = (G, s, t, n-1, p)$

PODEMOS VER QUE ESTA TRANSFORMACIÓN ES POLINOMIAL. TRANSFORMA INSTANCIAS DE TSP EN INSTANCIAS DE LEN-MIN-PATH (LE DAMOS COMO INPUT EL MISMO GRAFO, DOS VERTICES, UN ENTERO QUE REPRESENTA EL K Y OTRO QUE REPRESENTA p)

AHORA VEAMOS
RESP(I) = Si $\Leftrightarrow$ RESP(f(I)) = Si

$\Rightarrow$) Si EN G EXISTE UN CAMINO DE s a t QUE PASA POR TODOS LOS VERTICES Y SU PESO ES MENOR O IGUAL A P ENTONCES ES UN LEN-MIN-PATH DE LONGITUD n-1, YA QUE UN CAMINO QUE PASE POR TODOS LOS VÉRTICES TIENE LONGITUD n-1

$\Leftarrow$) TENEMOS UN CAMINO DE s a t DE PESO $\leq p$ Y QUE PASA POR n-1 VERTICES, ENTONCES TENEMOS UN CAMINO DE s a t QUE PASA POR TODOS LOS VERTICES Y TIENE PESO $\leq p$ ENTONCES ES UNA INSTANCIA DE SI DE TSP.

$\therefore$ LEN-MIN-PATH ES NP-COMPLETO

NOTA

HOJA N° 3

FECHA

d) YA VIMOS QUE K-MISS-LEN-PATH $\in$ NP

AHORA QUEREMOS VER QUE TSP $\leq_p$ K-MISS-LEN-PATH

PROPONGO $f(G, s, t, p) = (H, s, t, p)$

DONDE H ES UNA COPIA DEL GRAFO G CON K VÉRTICES AGREGADOS CONECTADOS CON TODOS (PARA QUE H SEA UN DIGRAFO COMPLETO DE $|V(G)|+K$ NODOS)

CON PESOS $> p$.

VEAMOS QUE f ES POLINOMIAL.
DADA LA MATRIZ DE ADYACENCIAS DE G ~~DE~~ DE TAMAÑO $n \times n$, PODEMOS CONSEGUIR LA DE H DE TAMAÑO $(n+k) \times (n+k)$ AGREGANDO FILAS Y COLUMNAS $\Rightarrow$ f ES POLINOMIAL.

TRANSFORMA INSTANCIAS DE TSP EN INSTANCIAS DE K-MISS-LEN-PATH YA QUE SOLO TRANSFORMO EL GRAFO QUE LE PASO COMO INPUT Y SIGUE SIENDO UN DIGRAFO COMPLETO PESADO QUE CONTIENE LOS VÉRTICES s y t.

VEAMOS $RESP(I) = SI \iff RESP(f(I)) = SI$

$\Rightarrow$) SI G TIENE UN CAMINO DE s a t CON PESO $\leq p$ QUE PASA POR TODOS LOS VÉRTICES (O SEA TIENE LONGITUD $n-1$) ENTONCES ES UN K-MISS-PATH YA QUE COMO HAY K VÉRTICES QUE ESTÁN CONECTADOS A TODOS LOS DEMÁS CON PESOS $> p$, TOMAR UN CAMINO QUE PASE POR ALGUNO DE ESOS VÉRTICES IMPLICA QUE LE SUME ALGO $> p$ AL PESO TOTAL DEL CAMINO, ENTONCES ESOS VÉRTICES NO VAN A FORMAR PARTE DE MI SOLUCIÓN

$\Leftarrow$) COMO EXISTE UN CAMINO DE s a t EN H QUE TIENE PESO $\leq p$ Y PASA POR $|V(G)|$ ~~+K~~ VÉRTICES, COMO LOS K VÉRTICES QUE ~~[illegible]~~ NO FORMAN PARTE DEL CAMINO SON VÉRTICES QUE PERTENECEN A H PERO NO A G, TENGO UN CAMINO DE s a t CON PESO $\leq p$ QUE PASA POR TODOS LOS VÉRTICES DE G.

Deberia ser H.

$\therefore$ K-MISS-LEN-PATH ES NP-COMPLETO

NOTA

HOJA Nº

FECHA

ej3: A

3)
a) LEN-MIN-PATH $\leq_p$ TSP

ESTA REDUCCIÓN POLINOMIAL VA A EXISTIR. USO EL EJERCICIO 13 DE LA PRÁCTICA 6 QUE VIMOS QUE ES VERDADERO EN CLASE:

SI DOS PROBLEMAS Π y Γ PERTENECEN A NPC ENTONCES $\Pi \leq_p$ y $\Gamma \leq_p \Pi$.

COMO VIMOS EN 2-c) QUE LEN-MIN-PATH ES NP COMPLETO y TSP ES NPC, AMBAS REDUCCIONES POLINOMIALES VAN A EXISTIR (YA PROBAMOS UNA EN 2.c))

b) SI SUPONGO QUE K-MISS-PATH TIENE UN ALGORITMO POLINOMIAL QUE LO RESUELVE, ENTONCES K-MISS-PATH PERTENECE A P.
COMO TSP $\leq_p$ K-MISS-PATH POR EL EJERCICIO ANTERIOR (2.d)

USO EL EJERCICIO 14.b) DE LA PRÁCTICA 6 QUE VIMOS QUE ES VERDADERO.

SI TENGO 2 PROBLEMAS DE DECISIÓN TALES QUE $\Pi \leq_p \Gamma$, SI $\Gamma \in P \Rightarrow \Pi \in P$.

ENTONCES COMO K-MISS-PATH $\in P$ y TSP $\leq_p$ K-MISS-PATH $\Rightarrow$ TSP TIENE QUE ESTAR EN P, O SEA TIENE QUE EXISTIR UN ALGORITMO POLINOMIAL QUE LO RESUELVA.

~~c) COMO ... QUE $\forall \Pi \in P$, $\Pi \leq_p$ K-LEN-MIN-PATH~~
~~COMO K-LEN-MIN-PATH $\in P$ POR EL EJERCICIO ANTERIOR 2.b)~~

~~TOMO CUALQUIER PROBLEMA $\Pi \in P$, SEA I INSTANCIA DE Π, RESUELVO I. LO PUEDO HACER EN TIEMPO POLINOMIAL PORQUE $\Pi \in P$. OBTENGO UNA RESPUESTA, SEA SI o NO.~~

~~SI LA RTA ES SI: COMPUTO UNA INSTANCIA SI DE K-LEN-MIN-PATH EN TIEMPO POLINOMIAL~~

~~ENTONCES~~

NOTA

c) K-LEN-MIN-PATH ∈ P por el ejercicio anterior (2.b)

qvq $\forall \Pi \in P$, $\Pi \leq_p$ K-LEN-MIN-PATH

Como en la reducción puedo simplemente tomar como función resolver el problema, es decir, dada una instancia $I \in \Pi$ resolver ~~la~~ la instancia para que me de SI o NO en tiempo polinomial y "transformar" esa instancia generando un input de SI o NO para K-LEN-MIN-PATH en tiempo polinomial (corriendo K-LEN-MIN-PATH con una instancia que me de ~~a~~ misma respuesta que en Π) esa reducción va a ser polinomial.

Esto voy a poder hacerlo para todos los $\Pi \in P$.

Esta bien la idea en general.

NOTA

ej4: A

HOJA Nº 5

FECHA

4) ALFABETO: NODOS $1 \ldots n$

SOLUCIONES PARCIALES:

$\langle (s) \mid \underset{(w_1 \ldots w_i)}{\text{SEC. DE VERTICES } W}, w, P, K \rangle$

DONDE p ES EL PESO DE LA SECUENCIA W + $p(s \rightarrow w_1) + p(w_i \rightarrow w)$

SOLUCIONES VÁLIDAS

$\langle (s) \mid \overbrace{w_1 \ldots w_i}^{W}, t, p, k \rangle$

DONDE $p \leq P \wedge |W| + 1 \leq K$

EXTENSIÓN: $\langle (s) \mid W\ con_i, w_i, p, k \rangle$

- $(s) \cup w' \longrightarrow U = W \cup \{w_i\}$
- $w' = t$ si $k = |W| + 1$, $p \leq P$

  algno en $V - U$ si no

PODA POR OPTIMALIDAD:

$s\ W\ w \rightarrow \langle s\ cam\ w, p, k \rangle$

$ \rightarrow \langle s\ cam'\ w, p', k \rangle$

SI $p' < p$ DESCARTO LA PRIMERA YA QUE LLEGO A UNA ~~SE~~ QUE PODRÍA TENER LONG $= K$ PERO MENOR PESO.

NOTA